

# Concours Général de Mathématiques “Minko Balkanski”

10 mai 2003

*Les six problèmes sont indépendants.*

*La clarté et la précision de la rédaction, qui doit être obligatoirement en français, seront prises en compte dans la note finale.*

La durée de la composition est de 4 heures.

## Problème I

Soit  $ABC$  un triangle. Soient  $D$  et  $E$  les projetés orthogonaux du point  $C$  sur les bissectrices des angles extérieurs des sommets  $A$  et  $B$ , respectivement. Montrer que la longueur du segment  $DE$  est égale à la moitié du périmètre du triangle  $ABC$ .

## Problème II

Soit  $k$  un entier naturel et soient  $2k + 1$  entiers naturels  $n_1, n_2, \dots, n_{2k+1}$  ayant la propriété suivante : pour tout  $i$  ( $1 \leq i \leq 2k + 1$ ), si l'on enlève  $n_i$ , les  $2k$  nombres qui restent peuvent être partagés en deux groupes de  $k$  nombres de même somme. Montrer que  $n_1 = n_2 = \dots = n_{2k+1}$ .

## Problème III

Soit  $ABC$  un triangle et soient  $H$  son orthocentre,  $O$  le centre du cercle circonscrit autour de  $ABC$  et  $I$  le centre du cercle inscrit dans  $ABC$ .

1. Montrer que les angles  $\angle ACO$  et  $\angle BCH$  sont égaux.
2. Montrer que  $OH$  et  $CI$  sont perpendiculaires si, et seulement si,  $\angle ACB = 60^\circ$ .

## Problème IV

Soient 50 diamants d'un poids total de 1kg. Montrer que l'on peut toujours trouver deux sous-ensembles de ces diamants, dont la différence des sommes des poids soit inférieure à  $10^{-15}$ kg.

## Problème V

Soient  $m$  et  $n$  des entiers naturels et soit  $ABCD$  un rectangle  $m \times n$  formé de  $mn$  petits carrés  $1 \times 1$ .

1. Montrer que la diagonale  $AC$  traverse exactement  $m + n - d$  des petits carrés, où  $d$  désigne le plus grand commun diviseur de  $m$  et  $n$ .
2. Combien y a-t-il de chemins de longueur minimale ( $= m + n$ ) reliant  $A$  à  $C$  et restant au bord des petits carrés?

## Problème VI

Pour un entier naturel  $m$  et un nombre premier  $l$ , on note  $f_l(m)$  le plus grand entier  $k$  tel que  $l^k$  divise le produit des entiers de 1 à  $m$ .

1. Montrer que  $f_l(m) = \left[\frac{m}{l}\right] + \left[\frac{m}{l^2}\right] + \left[\frac{m}{l^3}\right] + \dots$ , où pour tout nombre réel  $x$ ,  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$  (c'est-à-dire le plus grand entier qui est inférieur ou égal à  $x$ ).
2. Montrer que pour tout entier  $a \geq 1$ , il existe une infinité d'entiers  $m$  tels que  $m - f_2(m) = a$ .
3. Montrer que pour tout entier  $a \geq 1$  et pour tout nombre premier  $l \geq 3$ , l'équation  $m - f_l(m) = a$  n'admet qu'un nombre fini de solutions  $m$ .

FIN