Concours Général de Mathématiques "Minko Balkanski"

8 mai 2004

La clarté et la précision de la rédaction, qui doit être obligatoirement en **français** *ou en* **anglais**, *seront prises en compte dans la note finale.*

La durée de la composition est de 4 heures.

Exercice 1. Trouver tous les entiers positifs m et n tels que $3^m - 2^n = 1$.

Exercice 2. Montrer que pour aucun entier positif n, on ne peut partager les entiers n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ et $n+5$ en deux groupes tels que le produit des entiers dans l'un des groupes soit égal au produit des entiers dans l'autre groupe.

Problème I - Théorème de Morley

1. Montrer que les trois bissectrices d'un triangle passent par un même point. Quel est ce point?

2. Soit ABP un triangle équilatéral et soit F son centre. Soit D (resp. E) le point du segment BP (resp. AP) vérifiant $2PD = BD$ (resp. $2PE = AE$). Montrer que le triangle DEF est aussi équilatéral.

3. Soit ABC un traingle quelconque. Soient A_1, A_2 deux points de BC tels que $\angle BAA_1 = \angle A_1AA_2 = \angle A_2AC$; B_1, B_2 deux points de CA tels que $\angle CBB_1 = \angle B_1BB_2 = \angle B_2BA$; C_1, C_2 deux points de AB tels que $\angle ACC_1 = \angle C_1CC_2 = \angle C_2CB$. On note D le point d'intersection de BB_1 et CC_2, E le point d'intersection de CC_1 et AA_2, et F le point d'intersection de AA_1 et BB_2.

3a. Montrer que $\angle BFE = \angle CEF$ (*on pourrait commencer par exprimer* $\frac{AF}{AE}$ *en fonction des angles* α, β *et* γ *du triangle* ABC).

3b. Montrer que D est le point d'intersection des bissectrices du triangle BCM, où M désigne le point d'intersection de BF et CE.

3c. En déduire que le triangle DEF est équilatéral **(Théorème de Morley)**.

3d. Comment peut-on déduire le 2. du Théorème de Morley?

4. On se propose de démontrer le Théorème de Morley par une méthode géométrique. On part d'un triangle équilatéral DEF. On construit à l'extérieur de DEF trois triangles isocèles EFM, FDN et DEP ($\angle FEM = \angle EFM = x$, $\angle DFN = \angle FDN = y$ et $\angle EDP = \angle DEP = z$). Enfin on note A le point d'intersection de PE et NF, B le point d'intersection de MF et PD, et C le point d'intersection de ND et ME.

4a. Exprimer les angles du triangle ABC en fonction de x, y et z.

4b. En déduire le Théorème de Morley.

Problème II

1. Pour tout entier positif n, on note $f(n)$ le nombre de solutions de l'équation $2x + 3y = n$ en entiers positifs.

1a. Calculer $f(n)$ pour $n \leq 12$.

1b. Montrer que pour tout $n \geq 6$, on a $f(n) = f(n-2) + f(n-3) - f(n-5)$.

1c. Montrer que pour tout $n \geq 7$, on a $f(n) = f(n-6) + 1$.

2. Pour tout entier positif n, on note $g(n)$ le nombre de solutions de l'équation $x + 2y + 3z = n$ en entiers positifs.

2a. Calculer $g(n)$ pour $n \leq 12$.

2b. Montrer que pour tout $n \geq 7$, on a $g(n) = g(n-1) + g(n-2) - g(n-4) - g(n-5) + g(n-6)$.

2c. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $g(n) = g(n-1) + f(n)$.

FIN

Concours Général de Mathématiques "Minko Balkanski"

May 8th 2004

All the answers must be given in **English** *or in* **French**. *The clarity and precision will be taken into account for the final note.*

The exam is 4 hours long.

Exercice 1. Find all the positive integers m and n such that $3^m - 2^n = 1$.

Exercice 2. Let n be a positive integer. Show that there does not exist a partition of the integers n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ and $n+5$ into two groups, such that the product of the integers in the one of the groups equals the product of the integers in the other group.

Problem I - Morley's Theorem

1. Show that the three bissectors of a triangle pass through the same point. What is this point?

2. Let ABP be an equilateral triangle and denote by F its center. Let D (resp. E) be the point on the side BP (resp. AP) such that $2PD = BD$ (resp. $2PE = AE$). Show that the triangle DEF is also equilateral.

3. Let ABC be an arbitrary traingle. Let A_1, A_2 be two points of BC such that $\angle BAA_1 = \angle A_1AA_2 = \angle A_2AC$; B_1, B_2 be two points of CA such that $\angle CBB_1 = \angle B_1BB_2 = \angle B_2BA$; C_1, C_2 be two points of AB such that $\angle ACC_1 = \angle C_1CC_2 = \angle C_2CB$. We denote by D the intersection point of BB_1 and CC_2, by E the intersection point of CC_1 and AA_2, and by F the intersection point of AA_1 and BB_2.

3a. Show that $\angle BFE = \angle CEF$ (*one could start by expressing* $\frac{AF}{AE}$ *as a function of the angles* α, β *and* γ *of the triangle* ABC).

3b. Show that D is the intersection point of the bissectors of the triangle BCM, where M denotes the intersection point of BF and CE.

3c. Deduce that the triangle DEF est equilateral **(Morley's Theorem)**.

3d. How could we deduce 2. from the Morley's Theorem?

4. We want to give a geometric proof of Morley's Theorem. We start from an equilateral triangle DEF and we construct three isosceles triangles EFM, FDN and DEP outside the triangle DEF ($\angle FEM = \angle EFM = x$, $\angle DFN = \angle FDN = y$ and $\angle EDP = \angle DEP = z$). Then, we denote by A the intersection point of PE and NF, by B the intersection point of MF and PD, and by C the intersection point of ND and ME.

4a. Express the angles of the triangle ABC as a function of x, y and z.

4b. Deduce the Morley's Theorem.

Problème II

1. For a positive integer n, we denote by $f(n)$ the number of positive integral solutions of the equation $2x + 3y = n$.

1a. Compute $f(n)$ for $n \leq 12$.

1b. Show that for all $n \geq 6$, we have $f(n) = f(n-2) + f(n-3) - f(n-5)$.

1c. Show that for all $n \geq 7$, we have $f(n) = f(n-6) + 1$.

2. For a positive integer n, we denote by $g(n)$ the number of positive integral solutions of the equation $x + 2y + 3z = n$.

2a. Compute $g(n)$ for $n \leq 12$.

2b. Show that for all $n \geq 7$, we have $g(n) = g(n-1) + g(n-2) - g(n-4) - g(n-5) + g(n-6)$.

2c. Show that for all $n \geq 2$, we have $g(n) = g(n-1) + f(n)$.

THE END