INSTITUT DES HAUTES ÉTUDES
POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE
http://www.iheb.org

# Concours Général de Mathématiques "Minko Balkanski"

*21 mai 2005*

*La clarté et la précision de la rédaction, qui doit être obligatoirement en* **français** *ou en* **anglais***, seront prises en compte dans la note finale.*

La durée de la composition est de 4 heures.

**Exercice 1.**

**a)** Soient $A_1$, $B_1$, $C_1$, $A_2$, $B_2$ et $C_2$ des points distincts appartenant (dans cet ordre) à un même cercle. Montrer que $A_1A_2$ passe par l'intersection de $B_1B_2$ et $C_1C_2$ si, et seulement si, on a

$$A_1B_1 \cdot C_1A_2 \cdot B_2C_2 = B_1C_1 \cdot A_2B_2 \cdot C_2A_1.$$

**b)** Soit $\mathcal{O}$ le cercle inscrit dans un triangle $ABC$. Soient $A_1$, $B_1$ et $C_1$ les points où $\mathcal{O}$ intersecte les côtés $BC$, $AC$ et $AB$, respectivement. Soit $M$ un point à l'intérieur de $\mathcal{O}$. On note $A_2$, $B_2$ et $C_2$ les points d'intersection entre $\mathcal{O}$ et les segments $AM$, $BM$ et $CM$, respectivement. Montrer que $A_1A_2$, $B_1B_2$ et $C_1C_2$ passent par un même point.

**Exercice 2.** Soit $n$ un entier positif. Un tableau de nombres $n \times n$ est dit *spécial* si, pour tout entier $k$ entre 1 et $n$, la réunion de la $k$-ième ligne et de la $k$-ième colonne contient tous les nombres 1, 2,..., $2n-1$.

**a)** Il y a-t-il de tableaux spéciaux pour $n = 2$? $n = 3$? $n = 4$? $n = 5$?

**b)** Il y a-t-il de tableaux spéciaux pour $n = 2005$?

**Exercice 3.** Soit $r$ le rayon du cercle inscrit dans un triangle $ABC$.

**a)** On suppose que $ABC$ est acutangle et que $BC \leq AC \leq AB$. Trouver la valeur maximale que $\frac{BC}{r}$ puisse atteindre.

**b)** On suppose que $ABC$ est isocèle ($AC = BC$). Trouver la valeur minimale que $\frac{BC}{r}$ puisse atteindre.

**Exercice 4.** Un gourmand est assis devant un panier contenant $n$ bonbons rouges et $k$ bonbons jaunes, rendus indiscernables par des emballages noirs. Il mange des bonbons en appliquant l'algorithme suivant, en commençant par le **(i)**:

**(i)** s'il reste des bonbons, il en tire un au hazard, regarde sa couleur, puis l'avale et va en **(ii)**.

**(ii)** s'il reste des bonbons, il en tire un au hazard, regarde sa couleur et :
- si elle est la même que celle du dernier bonbon avalé, alors il l'avale et retourne en **(ii)**;
- sinon, il le remballe et le pose dans le panier, puis va en **(i)**.

**a)** Montrer que le gourmand finit toujours par manger tous les bonbons.

On note $P(n,k)$ la probabilité pour que le dernier bonbon avalé soit rouge ($0 \leq P(n,k) \leq 1$).

**b)** Calculer $P(0,2)$, $P(1,2)$, $P(2,2)$, $P(2,3)$ et $P(3,4)$?

**c)** Calculer $P(n,k)$ en fonction de $n$ et $k$ (*on pourrait utiliser une récurrence sur* $n+k$). En déduire la valeur de $P(2005,2)$.

FIN

INSTITUT DES HAUTES ÉTUDES
POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE
http://www.iheb.org

# Concours Général de Mathématiques "Minko Balkanski"

*May 21st 2005*

*All the answers must be given in* **English** *or in* **French**. *The clarity and precision will be taken into account for the final grade.*

The exam is 4 hours long.

**Exercise 1.**

**a)** Let $A_1$, $B_1$, $C_1$, $A_2$, $B_2$ and $C_2$ be distinct points belonging (in that order) to a circle. Show that $A_1A_2$ pass through the intersection of $B_1B_2$ and $C_1C_2$ if, and only if, we have

$$A_1B_1 \cdot C_1A_2 \cdot B_2C_2 = B_1C_1 \cdot A_2B_2 \cdot C_2A_1.$$

**b)** Let $\mathcal{O}$ be the inscribed circle of a triangle $ABC$. Let $A_1$, $B_1$ and $C_1$ be the points where $\mathcal{O}$ meets $BC$, $AC$ and $AB$, respectively. Let $M$ be a point from the interior of $\mathcal{O}$. We denote by $A_2$, $B_2$ and $C_2$ the intersection points between $\mathcal{O}$ and the segments $AM$, $BM$ et $CM$, respectively. Show that $A_1A_2$, $B_1B_2$ and $C_1C_2$ pass through one point.

**Exercise 2.** Let $n$ be positive integer. A $n \times n$ board is said to be *special* if, for all integers $k$ between 1 and $n$, the union of the $k$-th row and the $k$-th column contains all the numbers 1, 2,..., $2n-1$.

**a)** Does there exist a special board for $n = 2$? $n = 3$? $n = 4$? $n = 5$?

**b)** Does there exist a special board for $n = 2005$?

**Exercise 3.** Let $r$ be the radius of the inscribed circle of a triangle $ABC$.

**a)** Assume that $ABC$ is acute and $BC \leq AC \leq AB$. Find the maximal possible value for $\frac{BC}{r}$.

**b)** Assume that $ABC$ is isosceles ($AC = BC$). Find the minimal possible value for $\frac{BC}{r}$.

**Exercise 4.** A glutton sits in front of a box containing $n$ red candies and $k$ yellow candies, all wrapped in the same black paper. He decides to eat the candies using the following algorithm, starting by **(i)**:

**(i)** if there are still candies, he picks any of them, looks at its color, swallows it and goes to **(ii)**.

**(ii)** if there are still candies, he picks any of them, looks at its color and :
- if it is the same as the one of the last swallowed candy, then he swallows it and returns to **(ii)**;
- otherwise, he wraps it and puts it back into the box, and then goes to **(i)**.

**a)** Show that the glutton finishes always by eating all the candies.

Denote by $P(n, k)$ the probability that the last candy swallowed be red ($0 \leq P(n, k) \leq 1$).

**b)** Compute $P(0, 2)$, $P(1, 2)$, $P(2, 2)$, $P(2, 3)$ et $P(3, 4)$?

**c)** Compute $P(n, k)$ as a function of $n$ and $k$ (*one may use an induction on* $n + k$). Deduce the value of $P(2005, 2)$.

END