INSTITUT DES HAUTES ÉTUDES

POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

http://www.iheb.org


# Concours Général de Mathématiques "Minko Balkanski"

*6 mai 2006*

*La clarté et la précision de la rédaction, qui doit être obligatoirement en* **français** *ou en* **anglais***, seront prises en compte dans la note finale.*

La durée de la composition est de 4 heures.

**Exercice 1.** On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$ et une droite $\mathcal{L}$ qui ne l'intersecte pas. Soit $P$ le projeté orthogonal de $O$ sur $\mathcal{L}$. Soit $Q$ un point de $\mathcal{L}$ différent de $P$ et soient $QA$ et $QB$ les deux tangentes à $\mathcal{C}$ passant par $Q$ (les points $A$ et $B$ appartenant à $\mathcal{C}$). On note $K$ le point d'intersection de $AB$ et $OP$. Finalement, soient $M$ et $N$ les projetés orthogonaux de $P$ sur $QA$ et $QB$. Montrer que la droite $MN$ coupe le segment $KP$ en son milieu.

**Exercice 2.** Montrer que pour tous nombres réels positifs $x$, $y$ et $z$ on a l'inégalité :

$$\frac{(2x+y+z)^2}{2x^2+(y+z)^2} + \frac{(2y+z+x)^2}{2y^2+(z+x)^2} + \frac{(2z+x+y)^2}{2z^2+(x+y)^2} \leq 8.$$

**Exercice 3.** Pour tout entier naturel $n$, $\varphi(n)$ désigne le nombre d'entiers entre 1 et $n$ qui sont relativement premiers à $n$ (fonction d'Euler). On rappelle que si $n = p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_k}$ est la décomposition en facteurs premiers de $n$, alors $\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1})...(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1})$.

**a)** Montrer que $\varphi(n)$ n'est jamais un nombre impair $> 1$.
**b)** Montrer que $\varphi(n) \neq 14$.
**c)** Montrer qu'une infinité d'entiers naturels pairs ne sont pas de la forme $\varphi(n)$ pour aucun $n$.
**d)** Trouver tous les entiers naturels $n$ tels que $\varphi(n) = 2^{15}$.

**Exercice 4.** Soient $AI$ et $AM$ respectivement la bissectrice et la médiane issues du sommet $A$ d'un triangle $ABC$. La droite perpendiculaire à $AI$ passant par $I$ intersecte les droites $AB$, $AM$ et $AC$ en les points $D$, $P$ et $E$, respectivement. Soit $Q$ l'unique point de la droite $AI$ tel que $DQ$ soit perpendiculaire à $AD$.

**a)** Montrer que $EQ$ est perpendiculaire à $AE$.
**b)** Montrer que $PQ$ est perpendiculaire à $BC$.

FIN

INSTITUT DES HAUTES ÉTUDES
POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE
http://www.iheb.org

# Concours Général de Mathématiques "Minko Balkanski"

*May 6th 2006*

*All the answers must be given in* **English** *or in* **French**. *The clarity and precision will be taken into account for the final grade.*

Time limit : 4 hours.

**Exercise 1.** We consider a circle $\mathcal{C}$ with center $O$ and a line $\mathcal{L}$ that does not meet $\mathcal{C}$. Let $P$ be the orthogonal projection of $O$ on $\mathcal{L}$. Let $Q$ be a point on $\mathcal{L}$ distinct from $P$ and let $QA$ and $QB$ be the two tangent lines to $\mathcal{C}$ passing through $Q$ (the points $A$ and $B$ belonging to $\mathcal{C}$). We denote by $K$ the intersection point of $AB$ and $OP$. Finally, let $M$ and $N$ be the orthogonal projections of $P$ on $QA$ and $QB$. Show that the line $MN$ passes through the middle of the line segment $KP$.

**Exercise 2.**
Show that for all real positive numbers $x$, $y$ and $z$ the following inequality holds :

$$\frac{(2x+y+z)^2}{2x^2+(y+z)^2}+\frac{(2y+z+x)^2}{2y^2+(z+x)^2}+\frac{(2z+x+y)^2}{2z^2+(x+y)^2}\leq 8.$$

**Exercise 3.** For a natural number $n$, we denote by $\varphi(n)$ the number of integers between 1 and $n$ that are coprime to $n$ (Euler's function). We recall that if $n=p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$ is the prime factorization of $n$, then $\varphi(n)=(p_1^{\alpha_1}-p_1^{\alpha_1-1})...(p_k^{\alpha_k}-p_k^{\alpha_k-1})$.
**a)** Show that $\varphi(n)$ is never an odd integer $>1$.
**b)** Show that $\varphi(n)\neq 14$.
**c)** Show that there exist infinitely many even natural numbers not equal to $\varphi(n)$ for any $n$.
**d)** Find all the natural numbers $n$ such that $\varphi(n)=2^{15}$.

**Exercise 4.** Let $AI$ and $AM$ be the angle bisector and the median from $A$ in the triangle $ABC$. The line orthogonal to $AI$ passing through $I$ intersect the lines $AB$, $AM$ and $AC$ at the points $D$, $P$ et $E$, respectively. Let $Q$ be the unique point of the line $AI$ such that $DQ$ is orthogonal to $AD$.
**a)** Show that $EQ$ is orthogonal to $AE$.
**b)** Show that $PQ$ is orthogonal to $BC$.

END