Corrigé du Sujet du Concours Général de Mathématiques "Minko Balkanski" 2000

Problème I

1. Soit $ABCD$ un quadrilatère. On considère la demi-droite symétrique de la demi-droite de sommet A contenant D, par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Soit M l'unique point de cette demi-droite tel que les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ACD}$ soient égaux. En appliquant l'inégalité triangulaire au triangle MBC, prouver qu'on a l'inégalité :

$$AC.BD \leq AB.CD + BC.AD,$$

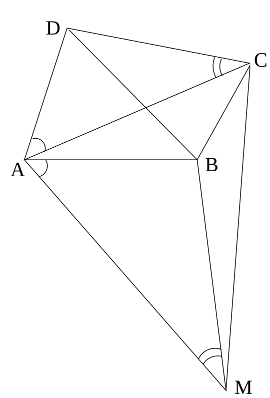
avec égalité si et seulement si les quatre points A, B, C et D sont situés, dans cet ordre, sur un même cercle (*Théorème de Ptolémée*).

2. Soient deux cercles concentriques tels que le rayon du plus grand soit deux fois plus grand que le rayon de l'autre. Soit $A_1B_1C_1D_1$ un quadrilatère convexe inscrit dans le plus petit des cercles. Notons A_2, B_2, C_2 et D_2 les points d'intersection du plus grand cercle avec les demi-droites A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 et D_1A_1, respectivement. Montrer que le périmètre de $A_2B_2C_2D_2$ est au moins deux fois plus grand de celui de $A_1B_1C_1D_1$ et trouver les cas d'égalité.

Démonstration :

1. L'inégalité triangulaire, appliquée au triangle MBC, dit que :

$$MC \leq MB + BC. \tag{1}$$



Les triangles AMB et ACD sont semlables (ont les mêmes angles) et donc :

$$MB = \frac{AB.CD}{AD} \quad et \quad \frac{AM}{AB} = \frac{AC}{AD}. \tag{2}$$

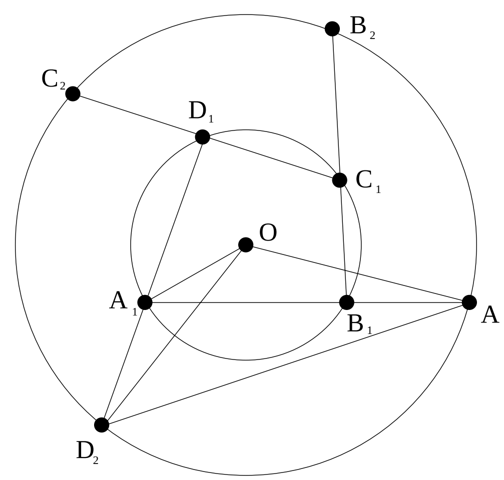
De la deuxième de ces relations et de l'égalité des angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{CAM}$ on déduit que les triangles DAB et CAM sont aussi semblables et donc :

$$MC = \frac{AC.BD}{AD}. \tag{3}$$

En injectant (2) et (3) dans (1) on obtient $\frac{AC.BD}{AD} \leq \frac{AB.CD}{AD} + BC$, d'où l'inégalité voulue.

L'égalité est atteinte si et seulement si $MC = MB + BC$, en d'autres termes si le point B se trouve sur le segment MC. Ceci n'arrive que si $\widehat{ABC} = 180° - \widehat{ABM} = 180° - \widehat{ADC}$, c'est à dire si les quatre points A, B, C et D sont situés, dans cet ordre, sur un même cercle.

2. Soit O le centre commun des deux cercles, qu'on peut supposer, sans restreindre la généralité, de rayons 1 et 2.



En appliquant la question 1. au quadrilatère $A_1D_2A_2O$ on obtient :

$$2A_1A_2 \leq 2A_1D_2 + D_2A_2. \tag{4}$$

De même on obtient :

$$2B_1B_2 \leq 2B_1A_2 + A_2B_2, \tag{5}$$

$$2C_1C_2 \leq 2C_1B_2 + B_2C_2, \tag{6}$$

$$2D_1D_2 \leq 2D_1C_2 + C_2D_2. \tag{7}$$

En additionnant (4), (5), (6) et (7) on obtient :
$D_2A_2 + A_2B_2 + B_2C_2 + C_2D_2 \geq$
$\geq 2(A_1A_2 - B_1A_2) + 2(B_1B_2 - C_1B_2) +$
$+ 2(C_1C_2 - D_1C_2) + 2(D_1D_2 - A_1D_2) =$
$= 2(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1A_1)$,
ce qui fallait démontrer.

On a égalité, si et seulement si (4), (5), (6) et (7) deviennent des égalités. Examinons par exemple (4). D'après la question 1. on a égalité en (4) si et seulement si les quatres points A_1, D_2, A_2 et O sont cocycliques. Dans ce cas : $\widehat{OA_1B_1} = \widehat{OA_1A_2} = \widehat{OD_2A_2} = \widehat{OA_2D_2} =$
$= 180° - \widehat{OA_1D_2} = \widehat{OA_1D_1}$.

Ceci implique que $D_1A_1 = A_1B_1$. En exploitant de la même manière (5), (6) et (7) on obtient que $A_1B_1C_1D_1$ est un carré. Réciproquement si $A_1B_1C_1D_1$ est un carré, alors $A_2B_2C_2D_2$ est un carré de deux fois plus grand périmètre.

Problème II

On désigne par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls. Soit une application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on ait l'inégalité $f(n+1) > f(f(n))$.

1. Montrer qu'il existe un entier $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(n_1) = 1$, puis montrer qu'on a $n_1 = 1$ (*pour l'existence de n_1 on pourra construire une suite strictement décroissante d'entiers naturels à l'aide de l'inégalité donnée dans l'énoncé*).

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f(n) = n$ (*on pourra raisonner par récurrence sur n et imiter la construction de la question précédente*).

Démonstration :

On commence par prouver le lemme suivant :

Lemme Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit A l'ensemble des entiers naturels supérieur ou égal à k. Soit une application $f : A \to A$, telle que pour tout $n \in A$ on ait l'inégalité $f(n+1) > f(f(n))$. Alors $f(k) = k$ et pour tout $n \geq k+1$ on a $f(n) \geq k+1$.

Preuve : On pose $x_0 = k$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ on définit $x_m = f(x_{m-1}) - 1$, à condition que x_{m-1} soit bien défini et que $f(x_{m-1}) \geq k+1$. Par l'inégalité de l'énoncé on trouve que si pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$ les nombres $x_0, x_1, ..., x_m$ sont bien définis, alors $f(f(k)) = f(f(x_0)) > f(f(x_1)) > ... > f(f(x_{m-1})) = f(x_m + 1) > f(f(x_m))$.

Comme il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'éléments de A, on peut trouver un $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(x_{m-1}) = k$. Si $x_{m-1} \geq k+1$, alors $k = f(x_{m-1}) > f(f(x_{m-1} - 1)) \in A$, ce qui est absurde, puisque k est le plus petit élément de A. Donc $x_{m-1} = k$ ce qui termine la preuve du lemme.

1. Cette question est une application directe du lemme avec $k = 1$ et $A = \mathbb{N}^*$.

2. On raisonne par récurrence. Par 1. on a déjà que $f(1) = 1$ et $f(n) \geq 2$, pour tout $n \geq 2$. Supposons que pour un certain $k \geq 2$ on a $f(1) = 1, f(2) = 2, ..., f(k-1) = k-1$ et $f(n) \geq k$, pour tout $n \geq k$. Alors en appliquant le lemme à la restriction de f à l'ensemble A des entiers naturels $\geq k$, on obtient que $f(k) = k$ et $f(n) \geq k+1$, pour tout $n \geq k+1$. Ceci termine la démonstration.

Problème III

On considère quatre points distincts deux à deux sur la parabole d'équation $y = x^2$. Montrer que si les quatre points sont cocycliques (i.e. appartiennent à un même cercle), alors leur isobarycentre se trouve sur l'axe de symétrie de la parabole.

Démonstration :

Soient (x_i, x_i^2) i=1,2,3,4 les quatre points donnés sur la parabole. Supposons qu'ils appartiennent tous à un même cercle de centre (a, b) et de rayon R. Alors pour tout i=1,2,3,4 on a :

$$(x_i - a)^2 + (x_i^2 - b)^2 = R^2.$$

Ceci veut dire que le polynôme :
$(X - a)^2 + (X^2 - b)^2 - R^2 =$
$= X^4 + (1 - 2b)X^2 - 2aX + (a^2 + b^2 - R^2)$,
admet les x_i comme racines (i=1,2,3,4). On obtient ainsi :
$X^4 + (1 - 2b)X^2 - 2aX + (a^2 + b^2 - R^2) =$
$= (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$.

En comparant les coefficients du terme en X^3 dans les deux côtés de cette égalité, on obtient $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, ce qui veut exactement dire que l'abscisse de l'isobarycentre des quatre points (x_i, x_i^2) est nulle, et donc cet isobarycentre se trouve sur l'axe de symétrie de la parabole.

Problème IV

Dans un pays il y a 2000 villes connectées entre elles grâce à un réseau de 4001 routes. Montrer qu'il existe un parcours fermé passant par moins de 20 villes (on pourra commencer par traiter le cas où de chaque ville partent au moins 3 routes différentes).

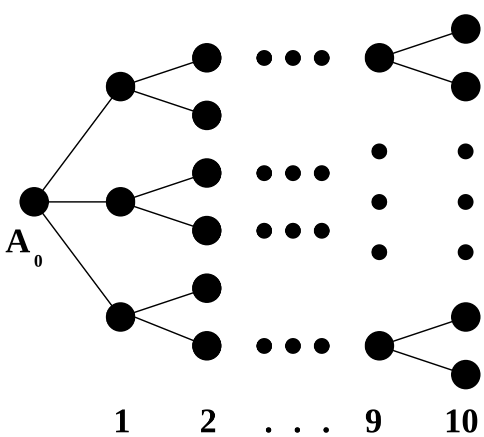
Démonstration :

On répète tant que possible le procédé suivant : s'il existe des villes dont partent au plus deux routes, on les enlève avec les routes issues d'elles. Il est important de remarquer qu'à la fin il reste au moins une ville, car en enlevant k villes on enlève au plus $2k$ routes, et comme le nombre de routes est strictement plus grand que deux fois le nombre de villes, on ne peux pas enlever toutes les routes et villes par ce procédé.

On s'est ainsi ramené à un pays avec moins de 2000 villes, mais tel que de chaque ville partent au moins trois routes.

Raisonnons par l'absurde en supposant que tout parcours fermé passe par au moins 21 villes. Choisissons donc une ville A_0, et considérons tous les parcours $\{A_0, A_1, ..., A_k\}$ tels que $k \leq 10$ et les villes A_i et A_{i+1} sont reliés par une route pour tout $i = 0, 1, ..., k-1$. Une ville sera dite de niveau k, si k routes la séparent de A_0.

Toute ville de niveau k ($1 \leq k \leq 9$) est relié à une ville de niveau $k-1$ et à au moins deux nouvelles villes de niveau $k+1$, car on a supposé que tout parcours fermé passe par au moins 21 villes. On a ainsi le plan suivant :



Il y a donc au moins $3 \times 2^{k-1}$ villes de niveau k ($1 \leq k \leq 10$) et donc au total on a au moins $3(1+2+...+2^9) = 3069 > 2000$ villes, ce qui est une contradiction. Il existe donc un parcours fermé passant par moins de 20 villes.

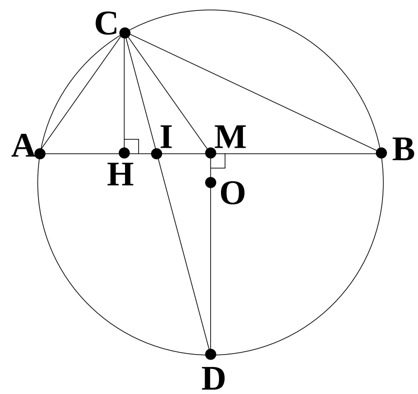
Problème V

Soient CH, CM et CI, respectivement, la hauteur, la médiane et la bissectrice issues du sommet C d'un triangle ABC. Si $CH = 7$, $CM = 18$ et $CI = x$, trouver pour quelles valeurs de x l'angle $\widehat{ACB}$ est :

$^{a)}$ aigu, $^{b)}$ droit, $^{c)}$ obtus.

Démonstration :

Il est facile de voir que le point I se trouve entre les points H et M. Soit O le centre du cercle circonscrit autour du triangle ABC et soit D l'autre point d'intersection de ce cercle avec la bissectrice CI.



Les points O, M et D se trouvent alors sur la médiatrice du segment AB. On remarque que :

- si l'angle $\widehat{ACB}$ est obtus, alors le point O est entre les points M et D et par conséquent $MD > OD = OC > CM = 18$.

- si l'angle $\widehat{ACB}$ est droit, alors les points O et M coincident et par conséquent $MD = CM = 18$.

- si l'angle $\widehat{ACB}$ est aigu, alors le point M est entre les points O et D et par conséquent $MD < CM = 18$.

Le but maintenant est d'exprimer MD est fonction de x. On a :

$$MI = MH - IH = \sqrt{18^2 - 7^2} - \sqrt{x^2 - 7^2},$$

$$MD = \frac{CH.MI}{IH} = \frac{7(\sqrt{18^2 - 7^2} - \sqrt{x^2 - 7^2})}{\sqrt{x^2 - 7^2}}$$

On trouve facilement que $MD = CM = 18$, si et seulement si $x = 8,4$. On en déduit que l'angle $\widehat{ACB}$ est obtus pour $7 < x < 8,4$, droit pour $x = 8,4$ et aigu pour $8,4 < x < 18$.

Problème VI

Deux entiers naturels sont dits premiers entre eux s'ils ont 1 comme seul diviseur commun. Étant donnés $k \geq 2$ entiers naturels, deux à deux distincts, a_1, a_2, ... , a_k, on considère l'ensemble $N(a_1, a_2, ..., a_k)$ formé des entiers naturels n tels que les k entiers a_1+n, a_2+n, ... , a_k+n soient premiers entre eux deux à deux. Le but de ce problème est de savoir si l'ensemble $N(a_1, a_2, ..., a_k)$ est fini ou infini.

1. Si $a < b$ sont deux entiers naturels, montrer que l'ensemble $N(a, b)$ est infini.

2. Si maintenant $a < b < c$ sont trois entiers naturels, montrer que l'ensemble $N(a,b,c)$ est encore infini.

3. Trouver quatre entiers naturels a, b, c et d, deux à deux distincts et tels que $N(a,b,c,d)$ soit fini.

4. Soit $k \geq 4$ et soient k entiers naturels, deux à deux distincts, a_1, a_2, ... , a_k. Montrer que l'ensemble $N(a_1, a_2, ..., a_k)$ est fini si et seulement s'il existe un entier m, avec $2 \leq m \leq k/2$, satisfaisant la propriété suivante :

Pour tout entier $r \in \{0, 1, ..., m-1\}$ il existe deux indices i et j, avec $1 \leq i < j \leq k$, tels que m divise les deux nombres $a_i - r$ et $a_j - r$.

Expliciter ce critère dans le cas où $k = 4$.

5. Soient $k \geq 2$ entiers naturels, deux à deux distincts, a_1, a_2, ... , a_k. Montrer que si l'ensemble $N(a_1, a_2, ..., a_k)$ est fini, alors il est vide.

Démonstration :

1. L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists\ p,\ premier\ p > b, n = p - b\}$ est un sous ensemble infini de $N(a,b)$.

2. Tout nombre premier divisant au moins deux parmi les trois nombres $a+n$, $b+n$ et $c+n$, divise également le nombre $A = (b-a)(c-a)(c-b)$. Soit P_1 le produit des nombres premiers qui divisent $(b-a)(c-a)$. Soit P_2 le produit des nombres premiers qui divisent $(c-b)$, mais qui ne divisent pas $(b-a)(c-a)$. Alors P_1 et P_2 sont premiers entre eux, et donc par le théorème des restes chinois il existe une infinité de nombres $n \in \mathbb{N}$ tels que P_1 divise $n+a-1$ et P_2 divise $n+b-1$. Il est facile de voir qu'un tel n est forcément dans $N(a,b,c)$, ce qui prouve que cet ensemble est infini.

3. Si deux parmi a, b, c et d sont pairs et les deux autres impairs, alors $N(a,b,c,d)$ est vide.

4. Tout nombre premier p divisant au moins deux parmi les entiers a_1+n, a_2+n, ... , a_k+n, divise également l'entier $A = \prod_{i<j}(a_i - a_j)$. Soit P l'ensemble des diviseurs premiers de A. Par le théorème des restes chinois on obtient :

$N(a_1, a_2, ..., a_k)$ est fini $\iff$

$\iff$ Il existe un nombre premier $p \in P$ tel que pour tout entier assez grand n, il existe deux indices i et j, avec $1 \leq i < j \leq k$, tels que p divise les deux nombres $a_i + n$ et $a_j + n$ $\iff$

$\iff$ Il existe un nombre premier $p \in P$ tel que pour tout entier $r \in \{0, 1, ..., p-1\}$, il existe deux indices i et j, avec $1 \leq i < j \leq k$, tels que p divise les deux nombres $a_i - r$ et $a_j - r$.

Si $p > k/2$, il existe au moins un entier $r \in \{0, 1, ..., p-1\}$ tel que p divise au plus un parmi les $a_i - r$, $1 \leq i \leq k$. Donc :

$N(a_1, a_2, ..., a_k)$ est fini $\iff$

$\iff$ Il existe un nombre premier $p \in P$, $2 \leq p \leq k/2$, tel que pour tout entier $r \in \{0, 1, ..., p-1\}$ il existe deux indices i et j, avec $1 \leq i < j \leq k$, tels que p divise les deux nombres $a_i - r$ et $a_j - r$.

5. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $N(a_1, a_2, ..., a_k)$ est fini, mais n'est pas vide, et prenons en un élement n_0. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a $n_0 + m \prod_{i<j}(a_i - a_j) \in N(a_1, a_2, ..., a_k)$, et donc $N(a_1, a_2, ..., a_k)$ n'est pas fini. C'est absurde. Donc si $N(a_1, a_2, ..., a_k)$ est fini, alors il est vide.

FIN