Corrigé du Sujet du Concours Général de Mathématiques "Minko Balkanski" 2001

Problème I

Soient a, b, c et d des nombres réels vérifiant $a^2 + b^2 = 1$ et $c^2 + d^2 = 1$.

1. Montrer que $|ac - bd| \leq 1$. Quels sont les cas d'égalité?

2. On suppose de plus que $ac + bd = 0$. Calculer $ab + cd$.

Démonstration : On peut prendre α et β tels que $a = \cos(\alpha)$, $b = \sin(\alpha)$, $c = \cos(\beta)$, $d = \sin(\beta)$.

1. On a $|ac - bd| = |\cos(\alpha + \beta)| \leq 1$, avec égalité, si et seulement si, $\sin(\alpha + \beta) = 0$, i.e. $c = \pm a$ et $-d = \pm b$.

2. On a $0 = ac + bd = \cos(\alpha - \beta)$, d'où $c = \pm b$ et $-d = \pm a$.

Problème II

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soient AA_2B_1B, BB_2C_1C, CC_2D_1D et DD_2A_1A des carrés construits sur chaque côté du parallélogramme et à l'extérieur de celui-ci. Montrer que les centres de ces quatre carrés forment un carré.

Démonstration : Supposons que $\angle ABC \geq \angle BCD$. Soient M, N, P et Q les centres des carrés AA_2B_1B, BB_2C_1C, CC_2D_1D et DD_2A_1A. Les triangles MNB et PNC sont égaux car :
– $MB = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}CD = PC$,
– $NB = \sqrt{2}BC = NC$,
– $\angle MNB = 90° + \angle B_1BB_2 = 90° + \angle BCD = \angle PNC$.

De plus $\angle MNP = 90° + \angle PNC - \angle MNB = 90°$ et donc $MNPQ$ est un carré. CQFD

Problème III

Soit n un entier naturel. On voudrait asseoir n couples mariés (n hommes et n femmes) autour d'une table ronde de $2n$ places de telle sorte que chaque homme soit assis entre deux femmes.

1. De combien de façons peut-on les asseoir ainsi?

2. Dans combien de cas chaque homme est-il assis à côté de sa femme?

3. Lorsque $n \leq 5$, donner le nombre de cas où aucun des hommes n'est assis à côté de sa femme.

Démonstration :

1. On peut asseoir les hommes de $2n!$ manières différentes et pour chacune de ces configurations, on peut asseoir les femmes de $n!$ manières différentes. Donc au total l'on trouve $2(n!)^2$ façons différentes pour les asseoir.

2. Une fois les hommes assis, il y a 2 manières pour asseoir les femmes, de façon que chaque femme soit à côté de son mari (soit toutes les femmes sont à droite de leur mari, soit toutes à gauche). Donc au total l'on trouve $4n!$ façons différentes pour les asseoir ainsi.

3. Une fois les hommes assis, l'on voit facilement qu'il y a respectivement 0, 0, 1, 2 et 13 façons différentes pour asseoir les femmes de façon qu'aucune femme ne soit assise à côté de son homme, quand n vaut respectivement 1, 2, 3, 4 et 5.

Problème IV

Soit ABC un triangle et soient CM, CI et CH, respectivement, la médiane, la bissectrice et la hauteur issues du sommet C de ce triangle. Déterminer les angles du triangle ABC dans chacun des deux cas suivants:

1. Les trois angles $\widehat{ACM}$, $\widehat{MCH}$ et $\widehat{HCB}$ sont égaux.

2. Les quatre angles $\widehat{ACM}$, $\widehat{MCI}$, $\widehat{ICH}$ et $\widehat{HCB}$ sont égaux.

Démonstration : Soit O le centre du cercle circonscrit autour du triangle ABC. De manière générale l'on a $\widehat{ACO} = 90° - \widehat{ABC} = \widehat{BCH}$. Comme dans les deux questions l'on a $\widehat{ACM} = \widehat{HCB}$, on déduit que les points M et O coïncident, ce qui est équivalent à dire que l'angle $\widehat{ACB}$ est droit.

1. Dans cette question CM se trouve être bissectrice dans le triangle AHC et de plus $AM = 2HM = 2BH$. Donc $\frac{AC}{CH} = \frac{AM}{MH} = 2$ et donc $\widehat{CAH} = 30°$. L'on déduit que les angles du triangle sont $30°$, $60°$ et $90°$.

2. Comme $AM = MC$ on déduit que $\widehat{MAC} = \widehat{ACM} = \frac{1}{3}\widehat{ACH}$ et donc $\widehat{MAC} = \frac{1}{4}90° = 22,5°$. L'on déduit que les angles du triangle sont $22,5°$, $67,5°$ et $90°$.

Problème V

Soit n un entier naturel et soient $x_1, x_2, ..., x_n$ des nombres réels compris entre -1 et 1. On suppose que $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 = 0$.

1. Dans le cas particulier où $n = 2$, déterminer $x_1 + x_2$.

2. Montrer qu'on a toujours $x_1 + x_2 + ... + x_n \leq \frac{n}{3}$ et que pour $1 \leq n \leq 8$ la valeur $\frac{n}{3}$ n'est jamais atteinte. (*on pourra introduire la fonction $f(x) = 4x^3 - 3x$ et chercher son minimum sur l'intervalle* $[-1, 1]$).

3. Dans le cas particulier où $n = 9$ trouver des réels $x_1, x_2, ..., x_9$ qui vérifient les hypothèses de l'énoncé et pour lesquels l'inégalité de la question 2. devient une égalité.

4. Dans cette question on prend $n = 3$. On sait d'après la question 2. que $x_1 + x_2 + x_3 < 1$. Quelle est la valeur maximale atteinte par $x_1 + x_2 + x_3$?

Démonstration :

1. Puisque $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$, on en déduit $x_1 + x_2 = 0$.

2. On a $f'(x) = 3(4x^2 - 1)$ et on en déduit facilement que sur l'intervalle $[-1, 1]$ on a $f(x) \geq -1$ avec égalité pour $x = -1$ et $x = \frac{1}{2}$. Donc $x_1 + x_2 + ... + x_n = -\frac{1}{3}(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)) \leq \frac{n}{3}$, avec égalité, si et seulement si, chaque x_i vaut -1 ou $\frac{1}{2}$. C'est impossible pour $n \leq 8$, puisque $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 = 0$.

3. $x_1 = x_2 = ... = x_8 = \frac{1}{2}$ et $x_9 = -1$.

4. On peut supposer que $x_1 = x, x_2 = y$ et $x_3 = -z$, avec $1 \geq x, y, z > 0$ et $x^3 + y^3 = z^3$. On a $(\frac{x+y}{2})^3 \leq \frac{x^3+y^3}{2} = \frac{z^3}{2}$ d'où : $x_1 + x_2 + x_3 = x + y - z \leq z(4^{\frac{1}{3}} - 1) \leq 4^{\frac{1}{3}} - 1$, avec égalité si $x_1 = x_2 = 2^{-\frac{1}{3}}$ et $x_3 = -1$.

Problème VI

On s'intéresse aux solutions, en entiers naturels, de l'équation :

$$X_1^2 + X_2^2 + ... + X_{2001}^2 - 2001X_1X_2...X_{2001} = 0. \tag{1}$$

1. Trouver une solution explicite très simple de cette équation.

2. Soit $(a_1, a_2, ..., a_{2001})$ une solution de (1), vérifiant $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_{2001}$. En considérant (1) comme un trinôme par rapport à la variable X_1, construire une autre solution de (1).

3. Déduire de 1. et 2. un algorithme qui permet d'obtenir une infinité de solutions de l'équation (1) en entiers naturels.

Démonstration :

1. $X_1 = X_2 = ... = X_{2001} = 1$.

2. Soit $(a_1, a_2, ..., a_{2001})$ une solution de (1), vérifiant $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_{2001}$. Alors $(2001a_2...a_{2001} - a_1, a_2, ..., a_{2001})$ en est une autre solution car $2001a_2...a_{2001} - a_1 > 2a_2 - a_1 > a_1$.

3. Notons que l'équation (1) est symétrique et donc chaque solution peut être réordonnée pour vérifier les hypothèses de la question précédente.

En itérant l'operation de la question précédente, à partir de la solution particulière de la première question, l'on obtient une infinité de solutions de l'équation (1) en entiers naturels.

FIN