Corrigé du Sujet du Concours Général de Mathématiques "Minko Balkanski" 2002

Problème I

Soient A et B deux points d'un cercle $\mathcal{C}$. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles tangents au cercle $\mathcal{C}$ aux points A_1 et A_2, respectivement, et tangents au segment AB aux points B_1 et B_2, respectivement. On suppose que A_1 et A_2 appartiennent à l'un des deux arcs de $\mathcal{C}$ dont les extrémités sont A et B, et on note M le milieu de l'autre arc de $\mathcal{C}$ d'extrémités A et B.

1. Montrer que les points A_1, B_1 et M sont alignés.
2. Montrer que les points A_1, A_2, B_2 et B_1 sont cocycliques.

Démonstration : Nous donnons une solution en utilisant la méthode de l'inversion. Ce problème peut être résolu en utilisant seulement les propriétés des angles inscrits.

Soit f l'inversion de centre le point M et de rayon $R = MA = MB$. On a $f(A) = A$, $f(B) = B$ et donc $f(\mathcal{C}) = d$ et $f(d) = \mathcal{C}$, où d désigne la droite passant par les points A et B. Par conséquent $f(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_1$ et $f(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_2$.

On en déduit que $f(A_1) = f(\mathcal{C} \cap \mathcal{C}_1) = f(\mathcal{C}) \cap f(\mathcal{C}_1) = d \cap \mathcal{C}_1 = B_1$ et donc en particulier les trois points A_1, B_1 et M sont alignés.

De même l'on trouve que $f(A_2) = B_2$ et donc $MA_1.MB_1 = R^2 = MA_2.MB_2$. Les triangles MB_1B_2 et MA_2A_1 sont donc semblables et les quatre points A_1, A_2, B_2 et B_1 sont cocycliques.

Problème II

Dix personnes sont assises autour d'une table. Le premier connaît exactement une personne parmi les autres, le deuxième connaît exactement deux personnes parmi les autres, etc..., le neuvième connaît les neuf autres personnes. Trouver combien de personnes connaît le dixième.

Démonstration : La 9ème personne connaît tout le monde. La 1ère personne connaît donc uniquement la 9ème. La 8ème personne connaît donc tous sauf la 1ère. La 2ème personne connaît donc uniquement la 8ème et la 9ème. La 7ème personne connaît donc tous sauf la 1ère et la 2ème. La 3ème personne connaît donc uniquement la 7ème, la 8ème et la 9ème. La 6ème personne connaît donc tous sauf la 1ère, la 2ème et la 3ème. La 4ème personne connaît donc uniquement la 6ème, la 7ème, la 8ème et la 9ème. La 5ème personne connaît donc tous sauf la 1ère, la 2ème, la 3ème et la 4ème.

La 10ème personne connaît donc la 5ème, 6ème, la 7ème, la 8ème et la 9ème, c'est-à-dire il connaît 5 personnes.

Problème III

Soient a, b et c trois nombres réels tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < c < 1$. Montrer que la fonction

$$f(x) = \frac{a^2 - 2cx + c^2}{1 - 2bx + b^2}$$

est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : La fonction f est définie partout sauf au point $b_0 = \frac{1+b^2}{2b}$. Pour $x \neq b_0$ l'on trouve $f'(x) = 2\frac{bc(c-b)+ba^2-c}{(1-2bx+b^2)^2}$.

Puisque $bc(c-b) + ba^2 - c < bc(c-b) + b - c = (b-c)(1-bc) < 0$, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, b_0[$ et sur $]b_0, \infty[$.

De plus, $f(b_0^+) = \infty$, $f(b_0^-) = -\infty$, et la limite de f en ∞ et en $-\infty$ est égale à $\frac{c}{b}$.

Problème IV

Soit p un nombre premier impair. Montrer que $\frac{(p+1)(p+2)...(2p-1)}{1.2...(p-1)} - 1$ est un nombre entier divisible par p^2.

Démonstration : Notons, d'abord que ce nombre est entier, comme il est égal à $\binom{2p-1}{p-1} - 1$. Comme p est un nombre premier, p ne divise pas $(p-1)!$. Nous dirons que p divise un nombre rationnel $\frac{a}{b}$, si p divise a et ne divise pas b.

Notons que $(1+p)(1+\frac{p}{2})...(1+\frac{p}{p-1}) - 1 = p + \frac{p}{2} + ... + \frac{p}{p-1} + p^2(...)$. Il suffit de montrer donc que p divise $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{p-1}$. On voit facilement ceci en regroupant le premier terme avec le dernier, le deuxième avec l'avant-dernier, etc...

Problème V

Soit $\mathcal{C}$ un cercle inscrit dans un quadrilatère $ABCD$ rencontrant les segments AB, BC, CD et DA en les points M, N, P et Q, respectivement. Montrer que les droites AC, BD, MP et NQ sont concourantes (c'est-à-dire passent par un même point).

Démonstration : Nous donnerons une solution utilisant les nombres complexes. On peut supposer que le cercle est de rayon 1 et centré en 0. Soit x, y, z et t les affixes des points où le cercle rencontre les segments BC, CD, DA et AB, respectivement (ces quatres nombres complexes sont de valeur absolue 1).

Alors l'affixe c du point C est égale à $\frac{2xy}{x+y}$ et les affixe de A, B et D s'écrivent de manière analogue.

Pour conclure l'on utilise le fait que trois points complexes u, v et w sont alignés, si et seulement si, $v\bar{w} - w\bar{v} + w\bar{u} - u\bar{w} + u\bar{v} - v\bar{u} = 0$.

Problème VI

Soit un entier $n \geq 2$. Chacun des n^2 petits carrés 1×1 d'un grand carré $n \times n$ contient un nombre réel. On suppose que la somme des deux plus grands nombres dans chaque ligne est égale à α, et que la somme des deux plus grands nombres dans chaque colonne est égale à β.

Montrer que $\alpha = \beta$ (*on pourra traiter d'abord le cas* $n = 3$ *et puis faire une récurrence en enlevant, pour le passage de* $n-1$ *à* n*, la ligne et la colonne contenant le plus grand nombre*).

Démonstration : Supposons que $\alpha \geq \beta$. L'on démontre par réccurence sur n l'assertion suivante : si la somme des deux plus grands nombres dans chaque ligne est égale à α, et que la somme des deux plus grands nombres dans chaque colonne est **au plus** égale à β, alors $\alpha = \beta$.

Lorsque $n = 2$, la somme de tous les 4 nombres est d'une part égale à 2α, d'autre part au plus égale à 2β, donc $\alpha = \beta$.

Supposons l'assertion vraie pour $n-1$ et prenons un carré $n \times n$. L'on peut supposer que le plus grand nombre se trouve en bas à droite. En enlevant la dernière ligne et la dernière colonne, il nous reste un carré $(n-1) \times (n-1)$ tel que la somme des deux plus grands nombres dans chaque ligne est égale à α, et que la somme des deux plus grands nombres dans chaque colonne est au plus égale à β. Par l'hypothèse de reccurence l'on déduit que $\alpha = \beta$. CQFD.

Remarque : Il était indispensable de modifier légérement l'assertion de l'énoncé du problème afin de pouvoir la démontrer à l'aide d'une reccurence!

FIN