Corrigé du Sujet du Concours Général de Mathématiques "Minko Balkanski" 2003

Problème I

Soit un triangle ABC. Soient D et E les projections orthogonales du point C sur les bissectrices des angles extérieurs des sommets A et B, respectivement. Montrer que la longueur du segment DE est égale à la moitié du périmètre du triangle ABC.

Démonstration : Soient G, H et I les projections orthogonales sur la droite AB des points D, C et E, respectivement. Soit $\alpha = \angle CAB$.

On a facilement $DG = DA\cos(\frac{\alpha}{2}) = AC\sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2}AC\sin(\alpha) = \frac{1}{2}CH$ et de même $EI = \frac{1}{2}CH$.

Ceci implique que le segment DE est parallèle à AB et intersecte AC et BC en leurs milieux respectifs M et N. D'où $DE = DM + MN + NE = \frac{1}{2}(AC + AB + BC)$.

Problème II

Soit k un entier naturel et soient $2k+1$ entiers naturels $n_1, n_2, .., n_{2k+1}$ ayant la propriété suivante : pour tout i $(1 \leq i \leq 2k+1)$, si l'on enlève n_i, les $2k$ nombres qui restent peuvent être partagés en deux groupes de k nombres de même somme. Montrer que $n_1 = n_2 = ... = n_{2k+1}$.

Démonstration : Supposons qu'il existe des nombres non tous égaux et satisfaisant la propriété de l'énoncé et prenons l'exemple le plus petit.

Tous les $2k+1$ nombres sont de même parité, car quelque soit le nombre que l'on enlève, la somme des $2k$ nombres qui restent doit être paire. S'il sont tous pairs en les divisant tous par 2 l'on obtient un exemple plus petit. S'il sont tous impairs en soustrayant 1 à chacun l'on obtient un exemple plus petit. Contradiction.

Problème III

Soit un triangle ABC et soient H son orthocentre, O le centre du cercle circonscrit autour de ABC et I le centre du cercle inscrit dans ABC.

1. Montrer que les angles $\angle ACO$ et $\angle BCH$ sont égaux.
2. Montrer que OH et CI sont perpendiculaires, si et seulement si, $\angle ACB = 60°$.

Démonstration :

1. $\angle ACO = 90° - \angle ABC = \angle BCH$.
2. D'après la première question CI est bissectrice dans le triangle COH. Donc CI et OH sont perpendiculaires, si et seulement si, $CO = CH$. Il est facile de voir que $CO = \frac{AC}{2\sin(\angle ABC)}$ et $CH = \cos(\angle ACB)\frac{AC}{\sin(\angle ABC)}$. Donc OH et CI sont perpendiculaires, si et seulement si, $\cos(\angle ACB) = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\angle ACB = 60°$.

Problème IV

Soient 50 diamants d'un poids total de 1kg. Montrer que l'on peut toujours trouver deux sous-ensembles de ces diamants, dont la différence des sommes des poids soit inférieure à 10^{-15}kg.

Démonstration : Il y a 2^{50} sous-ensembles différents de l'ensemble des diamants donnés. Par le principe de Dirichlet, il existe donc deux sous-ensembles de ces diamants (que l'on peut supposer disjoits, quitte à leur enlèver les éléments communs), dont la différence des sommes des poids soit inférieure à $(2^{50}-1)^{-1}$kg. Comme $2^{50} - 1 = 1024^5 - 1 > 1000^5 = 10^{15}$ on a fini.

Problème V

Soient m et n des entiers naturels et soit $ABCD$ un rectangle $m \times n$ formé de mn petits carrés 1×1.

1. Montrer que la diagonale AC traverse exactement $m+n-d$ des petits carrés, où d désigne le plus grand commun diviseur de m et n.

2. Combien y a-t-il de chemins de longueur minimale $(= m+n)$ reliant A à C et restant au bord des petits carrés.

Démonstration :

1. Le nombre de petits carrés traversés par la diagonale AC est égal au nombre de droites traversées. Il y en a m verticales, n horizontales et d qui s'intersectent sur la diaginale et que l'on doit soustraire pour ne pas les compter deux fois. CQFD

2. Il y en a $\binom{m+n}{m}$, car le chemin s'effectue en $m+n$ pas et tout le choix porte sur les m fois où l'on doit aller “vers la droite”.

Problème VI

Pour un entier naturel m et un nombre premier l, on note $f_l(m)$ le plus grand entier k tel que l^k divise $m!$.

1. Montrer que $f_l(m) = [\frac{m}{l}] + [\frac{m}{l^2}] + [\frac{m}{l^3}] + ...$, où pour tout nombre réel x, $[x]$ désigne la partie entière de x (c'est-à-dire le plus grand entier qui est inférieur ou égal à x).

2. Montrer que pour tout entier $a \geq 1$, il existe une infinité d'entiers m tels que $m - f_2(m) = a$.

3. Montrer que pour tout entier $a \geq 1$ et pour tout nombre premier $l \geq 3$, l'équation $m - f_l(m) = a$ n'admet qu'un nombre fini de solutions m.

Démonstration :

1. Parmi $1, 2, .., m$ il y a $[\frac{m}{l}]$ nombres multiples de l, $[\frac{m}{l^2}]$ nombres multiples de l^2, etc, d'où l'assertion.

2. Il est facile de voir que la somme des chiffres en base 2 d'un d entier naturel m est égale à $m - f_2(m)$, d'où l'assertion.

3. Pour tout nombre premier $l \geq 3$ on a $a = m - f_l(m) \geq m - f_3(m) = m - ([\frac{m}{3}] + [\frac{m}{3^2}] + ...) \geq m - \frac{m}{3} - \frac{m}{3^2} - ... = \frac{m}{2}$ et donc si m est une solution de $m - f_l(m) = a$ on a $m \leq 2a$. On en déduit qu'il y a un nombre fini de solutions. CQFD

FIN