

Corrigé du Sujet du Concours Général de Mathématiques "Minko Balkanski" 1999

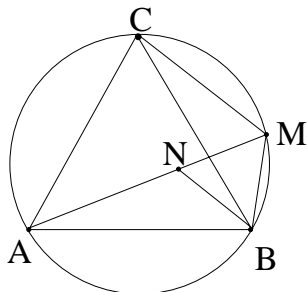
Problème I

Soit ABC un triangle équilatéral et soit M un point arbitraire du cercle circonscrit à ce triangle. Montrer que la longueur de l'un des segments MA , MB et MC est égale à la somme des longueurs des deux autres.

Démonstration :

On peut supposer, sans restreindre la généralité du problème, que M appartient au plus court arc reliant B et C ($MA \geq MB$ et $MA \geq MC$).

On montre à ce moment que $MA = MB + MC$.



Soit N le point sur le segment AM défini par $MN = MB$. Comme $\angle AMB = \angle ACB = 60^\circ$ le triangle MNB est équilatéral et par conséquent $MN = MB = NB$.

On remarque qu'alors le triangle ANB est égal au triangle CMB . En effet :

- (i) $AB = CB$
- (ii) $NB = MB$
- (iii) $\angle ABN = 60^\circ - \angle NBC = \angle CBM$

On en déduit que $AN = CM$ et comme on a déjà $MN = MB$ on conclut que $MA = MN + NA = MB + MC$, ce qui fallait démontrer.

Problème II

Les entiers naturels de 1 à n sont écrits au tableau ($n \geq 1$). Un élève a le droit d'effacer deux nombres a et b (avec $a \geq b$) du tableau et d'écrire à leur place leur différence $a - b$ (une seule fois). Il répète cette opération jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul nombre écrit sur le tableau.

1. Est-ce que ce dernier nombre peut valoir 1 si :
^{a)} $n = 12$? ^{b)} $n = 13$? ^{c)} $n = 1999$? (chaque réponse affir-

native doit être accompagnée d'un exemple, et chaque réponse négative doit être justifiée).

2. Décrire l'ensemble de tous les entiers naturels n pour lesquels ce dernier nombre peut valoir 1.

Démonstration :

2. La solution de ce problème repose sur l'observation suivante : la parité de la somme des nombres sur le tableau reste inchangée au fil des opérations effectuées par l'élève. Par conséquent si la somme initiale $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$ est paire, alors le dernier nombre qui reste sur le tableau ne peut pas être 1. C'est le cas si le reste de n modulo 4 vaut 0 ou 3. En revanche si le reste de n modulo 4 vaut 1 ou 2 le dernier nombre qui reste sur le tableau peut valoir 1 : par exemple, dans un premier temps, l'élève peut faire des différences de nombres consécutifs et ainsi se ramener à un tableau ne contenant que des 1 (forcément un nombre impair) et ensuite soustraire les 1 deux par deux, de façon qu'il n'en reste qu'un seul 1 sur le tableau.

1. En particulier la réponse est négative pour $n = 12$ et $n = 1999$ et affirmative pour $n = 13$.

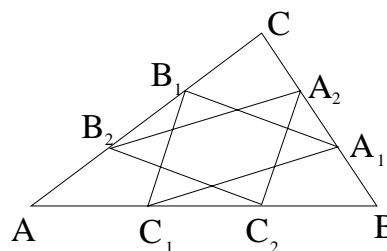
Problème III

On place des points C_1 et C_2 sur le côté AB d'un triangle ABC , et de même des points A_1 et A_2 sur le côté BC , et B_1 et B_2 sur le côté AC , de sorte que l'on ait : $AC_1 = C_1C_2 = C_2B$, $BA_1 = A_1A_2 = A_2C$ et $CB_1 = B_1B_2 = B_2A$.

Montrer que les triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ ont la même aire.

Démonstration :

Pour trois points quelconques X , Y et Z , on notera S_{XYZ} l'aire du triangle XYZ .



On a $\frac{S_{AC_1B_1}}{S_{ABC}} = \frac{AC_1 \cdot AB_1}{AB \cdot AC} = \frac{2}{9}$ et donc $S_{AC_1B_1} = \frac{2}{9}S_{ABC}$.

De même on a $S_{BA_1C_1} = S_{CB_1A_1} = \frac{2}{9}S_{ABC}$ et donc $S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} - S_{AC_1B_1} - S_{BA_1C_1} - S_{CB_1A_1} = \frac{1}{3}S_{ABC}$.

Par la même méthode on trouve aussi $S_{A_2B_2C_2} = \frac{1}{3}S_{ABC}$ et donc $S_{A_1B_1C_1} = S_{A_2B_2C_2}$, ce qui fallait démontrer.

Problème IV

Soient m et n deux entiers naturels strictement positifs et soient n entiers naturels k_1, k_2, \dots, k_n tels que $2^m - 1$ divise $2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_n}$. Montrer que $n \geq m$.

Démonstration :

On raisonne par l'absurde en supposant que $n < m$ et qu'il existe n entiers naturels k_1, k_2, \dots, k_n tels que $2^m - 1$ divise $2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_n}$. On applique à la somme $2^{k_1} + \dots + 2^{k_n}$ tant que possible les deux opérations suivantes :

(i) Si pour un i ($1 \leq i \leq n$) on a $k_i \geq m$, alors on remplace k_i par son reste modulo m (ceci ne change pas le reste de 2^{k_i} modulo $2^m - 1$).

(ii) Si deux parmi les k_i ont la valeur commune k on les remplace par $k + 1$ ($2^k + 2^k = 2^{k+1}$).

On remarque que l'application de chacune de ces deux opérations ne change pas le reste de la somme $2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_n}$ modulo $2^m - 1$.

Il est également facile de voir qu'au bout d'un nombre fini d'opérations on arrive à une somme formée d'au plus n puissances de 2 qui sont deux à deux différentes et dont chacune est plus petite que 2^{m-1} . Or une telle somme vaut au plus $2 + 2^2 + \dots + 2^{m-1} = 2^m - 2$ et ne pourra donc pas être divisible par $2^m - 1$. C'est absurde, ce qui termine notre démonstration.

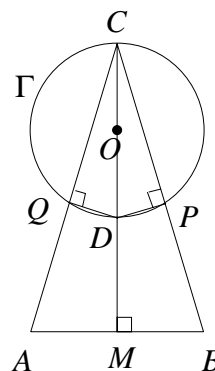
Problème V

Soit ABC un triangle, M le milieu du segment AB et Γ un cercle passant par C , dont le centre O appartient à la médiane CM . Le cercle Γ rencontre une deuxième fois les côtés BC et AC du triangle ABC en les points P et Q respectivement. Montrer que AB est parallèle à PQ si et seulement si $AC = BC$ ou l'angle ACB est droit.

Démonstration :

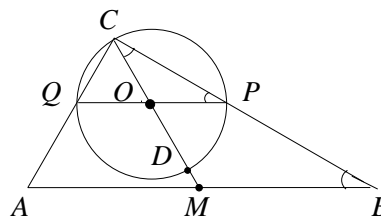
Soit D l'autre point d'intersection de CM avec le cercle Γ .

(i) Supposons que $AB = BC$.



Alors CM est médiane, hauteur et bissectrice dans le triangle ABC . On en déduit que $\angle QCD = \angle PCD$ et que les triangles rectangles QCD et PCD sont égaux. Par conséquent $CQ = CP$ et donc PQ est parallèle à AB .

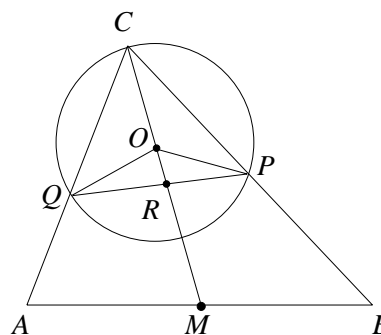
(ii) Supposons maintenant que l'angle ACB est droit.



Ceci implique que l'angle QCP est aussi droit et donc que PQ est diamètre dans Γ et par conséquent contient le point O . (en d'autres termes O est le point d'intersection de CM et PQ). À ce moment $\angle ABC = \angle BCM$ ($BM = MC$) et $\angle QPC = \angle PCO$ ($PO = OC$) et donc $\angle QPC = \angle ABC$, ce qui implique que PQ est parallèle à AB .

Jusqu'ici on a montré que si $AC = BC$ ou si l'angle ACB est droit, alors AB est parallèle à PQ .

(iii) Supposons réciproquement que AB est parallèle à PQ .



Soit R le point d'intersection de CM et PQ . Comme les triangles ABC et QPC sont semblables et M est le milieu de AB , on a que R est le milieu de QP ($QR = PR$). D'ailleurs on a $QO = PO$ et donc les triangles QRO et PRO sont égaux. On en déduit que, soit les points O et R coïncident (auquel cas l'angle QCP est droit), soit OR est perpendiculaire à QP (auquel cas CR (resp. CM) est hauteur et médiane dans le triangle QCP (resp. ACB) et donc $AC = BC$). Ceci termine la démonstration.

Problème VI

1.1 Soit un groupe de 6 personnes. On suppose que parmi trois quelconques d'entre elles, il en existe au moins deux qui se connaissent. Montrer qu'il existe trois personnes qui se connaissent deux à deux.

1.2 Donner un contre-exemple qui montre que cette affirmation n'est plus vraie pour un groupe de 5 personnes.

2.1 Soit un groupe de 9 personnes. On suppose que parmi quatre quelconques d'entre elles, il en existe au moins deux qui se connaissent. Montrer qu'il existe trois personnes qui se connaissent deux à deux.

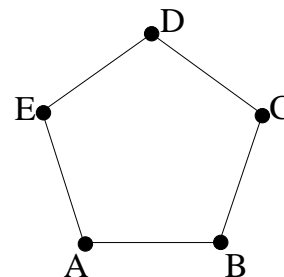
2.2 Donner un contre-exemple qui montre que cette affirmation n'est plus vraie pour un groupe de 8 personnes.

Démonstration :

1.1 Soit A une personne quelconque du groupe. Supposons d'abord que A connaît au moins trois des autres (disons B , C et D). Comme parmi B , C et D il y a au moins deux qui se connaissent, ces deux personnes forment avec A un groupe de trois personnes qui se connaissent deux à deux.

Maintenant supposons que A connaît au plus deux personnes. Il existent donc 3 personnes qui ne connaissent pas A et, comme parmi trois personnes quelconques il en existe au moins deux qui se connaissent, on en conclut que ces 3 personnes se connaissent deux à deux.

1.2 Le contre-exemple voulu est représenté par le graphe suivant :

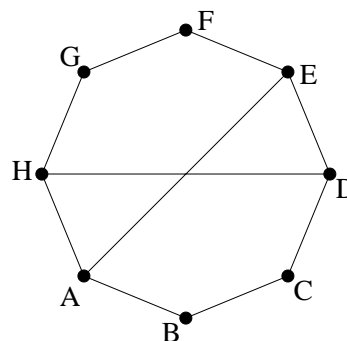


,où deux sommets sont reliés si et seulement si les personnes correspondantes se connaissent.

2.1 Il est impossible que chacune des 9 personnes dans le groupe connaisse exactement 3 des autres, car alors le nombre de paires de personnes qui se connaissent serait $\frac{3 \cdot 9}{2}$, qui n'est pas un entier. Il existe donc au moins une personne (nommons la A) qui connaît un nombre différent de 3 des autres personnes. Supposons d'abord que A connaît au moins 4 des autres. Comme parmi ces 4 personnes il y en a au moins deux qui se connaissent, ces deux personnes forment avec A un groupe de trois personnes qui se connaissent deux à deux.

Maintenant supposons que A connaît au plus deux personnes. Il existent donc 6 personnes qui ne connaissent pas A et, comme parmi quatre personnes quelconques il en existe au moins deux qui se connaissent, on conclut que parmi trois quelconques de ces 6 personnes il en existe au moins deux qui se connaissent. À ce moment là, en vertu de la question 1.1, il en existe 3 parmi ces 6 personnes qui se connaissent deux à deux.

2.2 Le contre-exemple voulu est représenté par le graphe suivant :



,où deux sommets sont reliés si et seulement si les personnes correspondantes se connaissent.

FIN