INSTITUT DES HAUTES ÉTUDES
POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE
http ://www.iheb.org

# Concours Général de Mathématiques “Minko Balkanski”

*19 mai 2007*

*Corrigés*

**Exercice 1.**

Soient $AM_A, BM_B, CM_C$ les médianes dans le triangle ABC et soit G leur point d'interséction. Considérons les triangles AGB, BGC et CGA. En appliquant l'inégalité triangulaire dans chacun de ces triangles on obtient respectivement : $AG+GB > AB$, $BG+GC > BC$ et $CG+GA > CA$ c'est-à-dire $\frac{2}{3}(m_a+m_b) > c$, $\frac{2}{3}(m_c+m_b) > a$, $\frac{2}{3}(m_a+m_c) > b$. En faisant la somme de ces trois inégalités on obtient : $\frac{4}{3}(m_a+m_b+m_c) > a+b+c$ d'où la partie gauche de l'inégalité dans l'énoncé.

Pour la partie droite considérons le triangle $BM_BM_A$. En utilisant l'inégalité triangulaire dans ce triangle on obtient $BM_B < M_BM_A + M_AB$ c'est-à-dire $m_b < \frac{c}{2}+\frac{a}{2}$. De la même facon en appliquant l'inégalité triangulaire dans les triangles $M_CM_BC$ et $M_AM_CA$ on obtient respectivement $m_c < \frac{a}{2}+\frac{b}{2}$ et $m_a < \frac{b}{2}+\frac{c}{2}$. En faisant la somme des trois inégalités précédents on obtient $m_a+m_b+m_c < a+b+c$ (la partie droite de l'inégalité de l'énoncé).

Les inégalités précédentes seront strictes si le triangle n'est pas dégénéré. Considerons maintenant le cas limite ou le point C est situé à l'intérieur du segment AB (C sur le segment AB, triangle dégénéré). Dans ce cas on a $c = a+b$. Si on exprime alors $m_a+m_b+m_c$ en termes de a, b et c on obtient $m_a+m_b+m_c = (b+\frac{a}{2})+(a+\frac{b}{2})+|\frac{c}{2}-b| = \frac{3}{2}(a+b)+|\frac{a-b}{2}|$. Alors $\frac{m_a+m_b+m_c}{a+b+c} = \frac{\frac{3}{2}(a+b)+|\frac{a-b}{2}|}{2.(a+b)} = \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\frac{|a-b|}{a+b}$ Si $a = b$ c'est-à-dire si le point C est situé au milieu du segment AB alors on obtient comme rapport $\frac{3}{4}$. Si en revanche on est dans le cas limite ou $b = 0$ et $a = c$ c'est-à-dire les points A et C coincident on obtient un rapport égal à 1. cqfd.

**Exercice 2.**

On note : $x = a^2+b^2$ $y = c^2+d^2$ $z = ad+bc$. On a : $xy = z^2+1$.
Donc $(x+y)^2 \geq 4xy = 4z^2+4 \geq (\sqrt{3}-z)^2 \Rightarrow x+y \geq \sqrt{3}-z \Rightarrow x+y+z \geq \sqrt{3}$

**Exercice 3.**

Si on est arrivé au troisième jet, le gain moyen est de $\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2}$ euros. Donc on accepte le deuxième jet si le chiffre tombé est plus grand que $\frac{7}{2}$, c'est-à-dire s'il est 4, 5 ou 6. La probabilité que cela arrive est $\frac{1}{2}$, donc le gain moyen si on a refusé le premier jet est de $\frac{1}{2}*\frac{4+5+6}{3}+\frac{1}{2}*\frac{7}{2} = \frac{17}{4}$. On accepte donc le premier paiement si le chiffre tombé est plus grand que $\frac{17}{4}$ (par conséquent 5 ou 6). Dans ce cas, le gain moyen du jeux et : $\frac{1}{3}*\frac{1}{2}*(5+6)+\frac{2}{3}*\frac{17}{4} = \frac{14}{3} = 4.66(6)$. On est donc prêt à payer M = 4.66 (qui est la précision maximale sur la monnaie que l'on a.)

**Exercice 4.**

Soit O un point à l'extérieur du plan du triangle ABC. Alors si on note a,b,c les longueurs du triangle on a : $\overline{OI} = \frac{a\overline{OA}+b\overline{OB}+c\overline{OC}}{a+b+c}$ et $\overline{OG} = \frac{\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}}{3}$. Alors on a :

$$\overline{IG} = \overline{OG}-\overline{OI} = \frac{(b+c-2a)\overline{OA}+(a+c-2b)\overline{OB}+(a+b-2c)\overline{OC}}{3.(a+b+c)}$$

Supposons que $\overline{IG} = s.(\overline{OA}-\overline{OB})$ ou $s \in R$ est une constante. Alors on obtient :

$$\frac{(b+c-2a-3.s.(a+b+c))\overline{OA}+(a+c-2b+3.s.(a+b+c))\overline{OB}+(a+b-2c)\overline{OC}}{3.(a+b+c)} = 0$$

Compte tenu du fait que le point O est à l'extérieur du plan du triangle ABC, les vectors $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ et $\overline{OC}$ sont linéairement indépendants et par conséquent le facteur devant $\overline{OC}$ doit etre nul : a+b-2c = 0. Analogiquement pour les autres cas.

Réciproquement si a+b-2c = 0, alors $\overline{IG} = \frac{(\overline{OA}-\overline{OB}).(b-a)}{2.(a+b+c)}$ c'est-à-dire IG sera parallèle à AB. cqfd

**Exercice 5.**

La décomposition de 2007 en facteurs premiers est : $2007 = 3^2.223$. En utilisant le fait que $2008 \equiv 1 \pmod{223}$ on obtient que $x^{2k} + 2008^{2007} \equiv x^{2k} + 1$ (mod p=223). On cherche par conséquent toutes les solutions de $x^{2k} \equiv -1$ (mod p=223). On éleve cette congruence à la puissance $\frac{p-1}{2} = 111$ (nombre impair) et on obtient : $x^{(p-1).k} \equiv (-1)^{111} \equiv -1$ (mod p=223). D'autre part en utilisant le petit theoreme de Fermat et le fait que gcd(x,p) = 1, on obtient : $x^{(p-1).k} \equiv 1^k \equiv 1$ (mod p = 223). Des deux précédentes congruences on obtient $-1 \equiv 1$ (mod p = 223) et par conséquent il faudrait que p = 223 divise 2 = 1-(-1) ce qui est impossible. Par conséquent l'ensemble des couples (x,k) cherchées est l'ensemble vide.

**Exercice 6.**

La bijection considerée entre les 2 problèmes est la suivante : on remplace les parenthèses ouvrantes "(" avec les segments "montants" ainsi que les parenthèses fermantes ")" avec les segments "descendants". Ainsi la condition que on a plus de "(" que de ")" à chaque moment est équivalent à la conditon que la hauteur de la montagne à chaque instant doit rester non négative. Le nombre total de montagnes constituées de n segments "montants" et de n segments "descendants" est $C_{2n}^{n}$. Maintenant on doit soustraire le nombre de montagnes qui ne sont pas du type considéré en a.) c'est-à-dire qui passent sous le sol. Pour chaque montagne qui passe sous le sol il y a un endroit unique où elle passe sous le sol pour la première fois. A partir de cet endroit on inverse le sens de tous les segments (voir Figure 1) : les segments "montants" deviennent "descendants" et les segments "descendants" deviennent "montants". Comme il'y a k segments "montants" et k-1 segments "descendants" initiallement à partir de l'endroit précédent, après la réflexion on aura k segments "descendants" et k-1 segments "montants". Au total on aura par conséquent n-1 segments "montants" et n+1 segments "descendants" c'est-à-dire la dernière côte de la montagne sera deux pas sous le sol. A l'inverse chaque chemin qui est constitué de n-1 segments "montants" et n+1 segments "de! scendants" sera l'image par la réflexion précédente d'une seule et unique montagne qui passe sous le sol avant de finir sur le niveau du sol. Il y a au total par conséquent un nombre $C_{2n}^{n-1}$ de montagnes qui passent sous le sol (égal au nombre de manières differéntes de choisir n-1 élements parmi 2n élements). Ainsi le nombre de montagnes qui ne passent pas sous le sol est : $M_n = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$.